

## MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE VARIADO

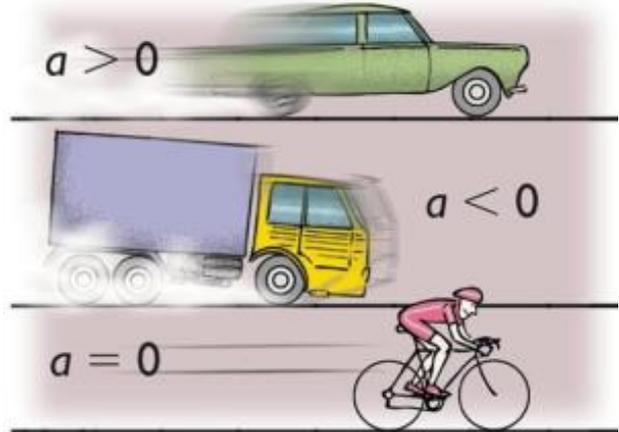
### M.R.U.V

Un cuerpo tiene MRUV cuando su trayectoria es una recta, su movimiento es en un solo sentido y además su velocidad tiene aceleración constante.

A) **ACELERACION.** - (**a**) Es la variación del vector velocidad en el transcurso del tiempo que dura el movimiento.

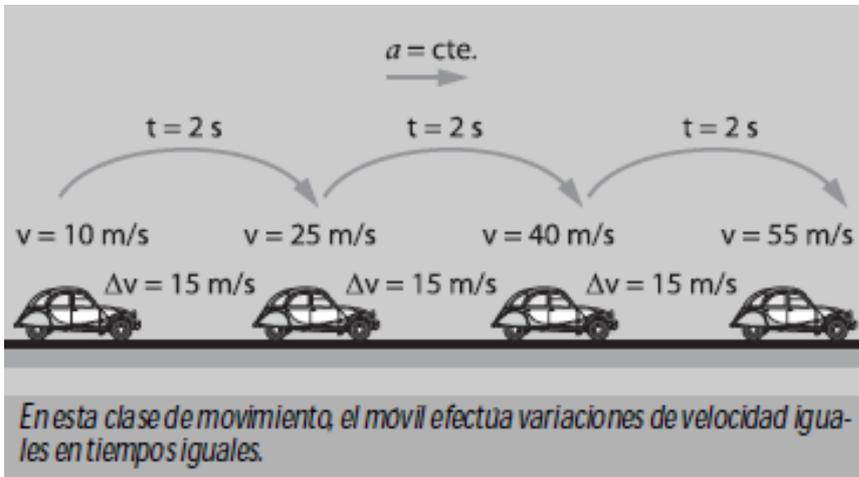
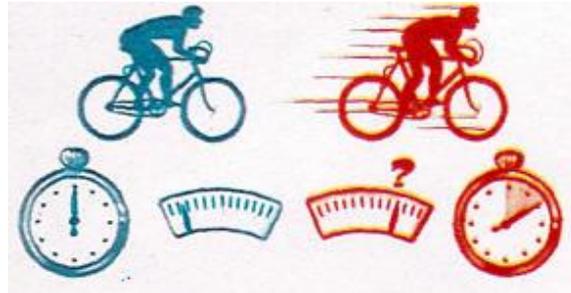
Es positiva cuando tiene la misma dirección, el mismo sentido y además existe aumento de la rapidez en la unidad de tiempo; y se considera negativa cuando existe una disminución de la rapidez.

La velocidad no solo varía por efecto de la aceleración, sino también cuando la dirección del movimiento cambia. Ejemplo: el movimiento de un ciclista con rapidez constante alrededor de una pista circular tiene velocidades diferentes por los cambios de dirección que experimenta y no por efecto de la aceleración.



La ecuación que mide La aceleración es;

$$a = \frac{v_f - v_o}{t}$$



B) UNIDADES DE LA ACCELERACIÓN

SISTEMA INTERNACIONAL:  $a = \text{m/s}^2$

SISTEMA cgs:  $a = \text{cm/s}^2$

C) ECUACIONES DEL MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE VARIADO

1) CUANDO HAY VELOCIDAD INICIAL	2) CUANDO NO HAY VELOCIDAD INICIAL. - Es decir, cuando parte del reposo
$v_f = v_o + a.t$	$v_f = a.t$
$v_f^2 = v_o^2 + 2ae$	$v_f^2 = 2ae$
$e = v_o t + a.t^2/2$	$e = a.t^2/2$

- 3) **VELOCIDAD MEDIA.** - llamada velocidad promedio, es la semisuma de la velocidad inicial y la final de un móvil. Este vector sirve para considerar a dicho movimiento como uniforme.

$$v = \frac{v_o + v_f}{2}$$

$$e = \frac{v_o + v_f}{2} . t$$

D) **LEYES DEL MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE VARIADO**

**PRIMERA.** - La aceleración es directamente proporcional a los tiempos transcurridos o también podemos decir que la aceleración es constante

**SEGUNDA.** - Los espacios recorridos son proporcionales a los cuadrados de los tiempos.

E) **REPRESENTACIÓN GRAFICA DE LA VELOCIDAD Y CÁLCULO DE LA DISTANCIA RECORRIDA.**

Utilizando el sistema de coordenadas (plano cartesiano). En el eje de las abscisas se coloca el tiempo y en el eje de las ordenadas a la velocidad; si el móvil parte del reposo se empezara a graficar desde el origen, pero si el móvil inicia su movimiento con una determinada velocidad, entonces el grafico empezará en cualquiera de los puntos del eje de las ordenadas. Igualmente, si el gráfico asciende, la aceleración será positiva y al contrario si el grafico desciende la aceleración será negativa.

PUNTO	v	t	a
A	5m/s	1	5m/s <sup>2</sup>
B	10m/s	2	5m/s <sup>2</sup>
C	15m/s	3	5m/s <sup>2</sup>
D	20m/s	4	5m/s <sup>2</sup>

Para calcular la distancia recorrida se trazan perpendiculares al eje x desde cada punto, obteniendo triángulos cuyas áreas vienen a ser la distancia o espacio recorrido.

$$A = \frac{b.h}{2}$$

Pero  $e = a.t^2/2$  además  $a=v/t$

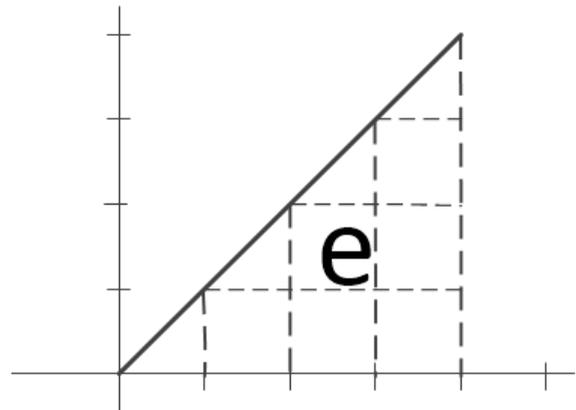
$$e = v/t . t^2 \quad e = v.t \text{ que es igual a } \quad A = b.h/2$$

$$e_A = \frac{5m/s \cdot 1s}{2} = 2,5m$$

$$e_B = \frac{10m/s \cdot 2s}{2} = 10m$$

$$e_C = \frac{15m/s \cdot 3s}{2} = 22.5m$$

$$e_D = \frac{20m/s \cdot 4s}{2} = 40m$$



## Práctica calificada 04: Problemas de MRUV

- 1.- De los casos siguientes, ¿en cuál hay aceleración?:  
 a) Un avión a punto de despegar.  
 b) Un coche frenando.  
 c) Un ciclista rodando a 35 km/h.  
 d) Una persona subiendo en escalera mecánica.
- 2.- Si un ciclista se mueve a una velocidad de 5 m/s y acelera 1 m/s<sup>2</sup>, a los 10 segundos su velocidad será de:  
 a) 10 m/s    b) 12 m/s    c) 15 m/s    d) 20 m/s
- 3.- Un coche marcha a 36 km/h y al cabo de 30 segundos su velocidad es de 72 km/h. ¿Cuál ha sido su aceleración?:  
 a) 0,33 m/s<sup>2</sup>    b) 1,2 m/s<sup>2</sup>    c) 36 m/s<sup>2</sup>    d) 0,5 m/s<sup>2</sup>
- 4.- Un vehículo que circula a 36 km/h tarda 10 segundos en quedarse parado. ¿Cuál ha sido su aceleración de frenado?:  
 a) 1 m/s<sup>2</sup>    b) 3,6 m/s<sup>2</sup>    c) -3,6 m/s<sup>2</sup>    d) -1m/s<sup>2</sup>
- 5.- Un coche circula a una velocidad de 72 km/h y apretando el acelerador logra que a los 20 s el indicador de velocidad marque 144 km/h. ¿Qué espacio ha recorrido en ese tiempo?:  
 a) 500 m    b) 600 m    c) 144 m    d) 2000 m
- 6.- Un móvil parte del reposo y con una aceleración de 0,12 m/s<sup>2</sup> recorre 294 m. ¿Cuánto tiempo tarda en hacer ese recorrido?:  
 a) 20 s    b) 70 s    c) 40 s    d) 24,5 s
- 7.- Un móvil que lleva una velocidad de 5 m/s acelera 6 m/s<sup>2</sup>. Su velocidad a los 4 segundos será:  
 a) 30 m/s    b) 11 m/s    c) 29 m/s    d) 19 m/s
- 8.- Partiendo del reposo, un coche de fórmula 1 puede alcanzar una velocidad de 180 km/h en 10 s. ¿Qué espacio recorre en ese tiempo?:  
 a) 180 m    b) 250 m    c) 300 m    d) 2 km
- 9.- Un móvil parte del reposo con una aceleración de 20 m/s<sup>2</sup> constante. Calcular:  
 a) ¿Qué velocidad tendrá después de 15 s?  
 b) ¿Qué espacio recorrió en esos 15 s?
- 10.- Un auto parte del reposo, a los 5 s posee una velocidad de 90 km/h, si su aceleración es constante, calcular:  
 a) ¿Cuánto vale la aceleración?  
 b) ¿Qué espacio recorrió en esos 5 s?  
 c) ¿Qué velocidad tendrá a los 11 s?
- 11.- Un motociclista parte del reposo y tarda 10 s en recorrer 20 m. ¿Qué tiempo necesitará para alcanzar 40 km/h?
- 12.- Un automóvil que viaja a una velocidad constante de 120 km/h, demora 10 s en detenerse. Calcular:  
 a) ¿Qué espacio necesitó para detenerse?  
 b) ¿Con qué velocidad chocaría a otro vehículo ubicado a 30 m del lugar donde aplicó los frenos?
- 13.- Un ciclista que va a 30 km/h, aplica los frenos y logra detener la bicicleta en 4 segundos. Calcular:  
 a) ¿La desaceleración de los frenos?  
 b) ¿Qué espacio necesitó para frenar?
- 14.- Un avión, cuando toca pista, acciona todos los sistemas de frenado, que le generan una desaceleración de 20 m/s<sup>2</sup>, necesita 100 metros para detenerse. Calcular:  
 a) ¿Con qué velocidad toca pista?  
 b) ¿Qué tiempo demoró en detener el avión?
- 15.- Un camión viene disminuyendo su velocidad en forma uniforme, de 100 km/h a 50 km/h. Si para esto tuvo que frenar durante 1500 m. Calcular:  
 a) ¿Qué desaceleración produjeron los frenos?  
 b) ¿Cuánto tiempo empleó para el frenado?
- 16.- La bala de un rifle, cuyo cañón mide 1,4 m, sale con una velocidad de 1400 m/s. Calcular:  
 a) ¿Qué aceleración experimenta la bala?  
 b) ¿Cuánto tarda en salir del rifle?
- 17.- Un cuerpo se mueve con una velocidad inicial de 4 m/s y una aceleración constante de -1,5 m/s<sup>2</sup>, determinar:  
 a) ¿la velocidad del cuerpo a los 2 s?  
 b) ¿su posición al cabo de 2 s?
- 18.- Al aplicar los frenos de un auto que viajaba 54 km/h su velocidad disminuye uniformemente y en 8 s, se anula. ¿Cuánto vale la aceleración?
- 19.- ¿Puede un cuerpo tener velocidad hacia el norte y al mismo tiempo estar acelerando hacia el sur? Ejemplificar.
- 20.- Un automóvil se desplaza a una velocidad de 10 m/s y frena en 20 m, determinar:  
 a) ¿Cuál es aceleración de frenado?  
 b) ¿Qué tiempo tarda en detenerse?

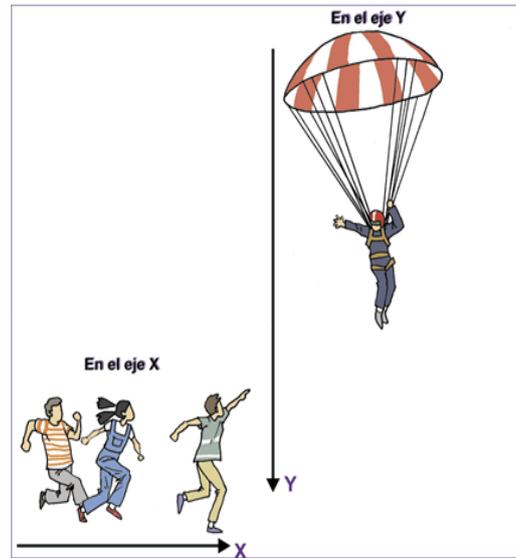
### CAIDA LIBRE DE LOS CUERPOS

Es un movimiento vertical de un cuerpo dirigido hacia abajo, cuya aceleración causada por la atracción de la Tierra, permanece constante. Dicha aceleración se llama aceleración de la gravedad y su valor es de aproximadamente 9.8 m/s<sup>2</sup>

El movimiento se realiza en el eje de las y

**LEYES DE LA CAIDA LIBRE DE LOS CUERPOS:**

- 1º La aceleración es constante y su valor corresponde a aquel que tiene la gravedad.
- 2º Los espacios recorridos son proporcionales a los cuadrados de los tiempos empleados.
- 3º La velocidad de caída es proporcional al tiempo transcurrido.
- 4º En el vacío los cuerpos caen con la misma velocidad independientemente de sus masas y formas.



El valor de la gravedad, tiene un valor aproximado a: 9,8m/s<sup>2</sup> = 980cm/s<sup>2</sup> = 32pies/s<sup>2</sup>

**ECUACIONES DE LA CAIDA LIBRE.** - Las fórmulas empleadas son las mismas que el MRUV, ya que la caída libre pertenece a tal movimiento.

a) <b>Cuando existe velocidad inicial.</b> - Es decir, cuando un cuerpo es arrojado hacia abajo, las ecuaciones son las mismas que en el movimiento uniformemente variado pero la aceleración es reemplazada por la gravedad y el espacio por la altura:	a) <b>Cuando no existe velocidad inicial.</b> - Es decir, cuando un cuerpo cae sin ser arrojado.
$v_f = v_o + a \cdot t$ $v_f^2 = v_o^2 + 2ae$ $e = v_o t + a \cdot t^2 / 2$ $v_f = v_o + g \cdot t$ $v_f^2 = v_o^2 + 2gh$ $h = v_o t + g \cdot t^2 / 2$	$v_f = a \cdot t$ $v_f^2 = 2ae$ $e = a \cdot t^2 / 2$ $v_f = g \cdot t$ $v_f^2 = 2gh$ $h = g \cdot t^2 / 2$

**VELOCIDAD LIMITE DE CAÍDA.** - Resulta cuando la resistencia del aire anula a la aceleración de la gravedad, siendo a partir de ese instante un movimiento aproximadamente uniforme.

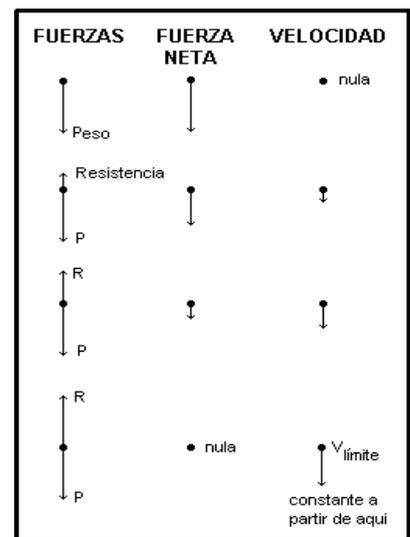
**MOVIMIENTO ASCENSIONAL.** - Es uniformemente retardado, porque un cuerpo que asciende (o sube hacia arriba) lo hace por efecto de un impulso que le imprime una velocidad inicial y a la vez la aceleración de la gravedad se opone a ese movimiento. Dos ecuaciones son importantes:

**Tiempo máximo.** - Se calcula en:

$$t_m = v_o / g$$

**Altura máxima.** - La altura máxima alcanzada por un cuerpo con movimiento ascensional se calcula en:

$$h_m = v_o^2 / 2g$$



**TIRO O LANZAMIENTO VERTICAL.** - Es el movimiento tanto hacia arriba como hacia abajo, cuando al cuerpo (objeto o móvil) se le imprime una velocidad inicial.

En este tipo de movimiento se considera a la gravedad un valor positivo cuando el tiro es hacia abajo y negativo cuando el tiro es hacia arriba.

Las fórmulas son las mismas que para el M.R.U.V con velocidad inicial, donde se reemplaza altura (h) en vez de espacio y la gravedad en vez de aceleración.

**PRACTICA CALIFICADA 05: PROBLEMAS DE CAIDA LIBRE:**

- 1.- Una pelota, que se encuentra en lo alto de un tejado, tarda en caer al suelo 3 segundos. ¿Desde qué altura cayó?:
- 2.- una piedra es soltada desde una altura de 120 metros. Calcular el tiempo que tarda en caer y la velocidad con la que impacta en el suelo
- 3.- Un cuerpo es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad de 29.4 m/s. Calcular:
- que altura abra subido al primer segundo
  - que velocidad llevara al primer segundo
  - que altura máxima alcanzará
  - que tiempo tardará en subir
  - cuánto tiempo dura en el aire
- 4.- se tira una piedra verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial de 8 m/s. Calcular:
- que velocidad llevara a los 4 segundos de su caída
  - que distancia recorre en ese tiempo
- 5.- se lanza verticalmente hacia arriba un cohete con una velocidad de 20 m/s. Calcular:
- la distancia que recorre a los 2 segundos
  - la velocidad que lleva en ese tiempo
  - cual es la altura máxima que alcanza
  - cuanto tiempo dura en el aire
- 6.- Una persona está parado a 20 m de altura. Calcular qué tiempo tarda y con qué velocidad toca el suelo una piedra si:
- La deja caer.
  - La tira para abajo con  $V_0 = 10$  m/s.
  - La tira para arriba con  $V_0 = 10$  m/s.
- 7.- Renzo está parado sobre el puente de un río de 60m de altura, arroja una piedra en línea recta hacia abajo con una velocidad de 15m/s. Calcular:
- con qué velocidad chocará con el agua.
  - qué tiempo tardará en descender.
- 8.- Se lanza verticalmente un cuerpo hacia arriba, con una velocidad inicial de 49m/s. Calcula:
- La máxima altura que alcanza.
  - El tiempo que demora en subir y bajar
- 9.- Un cuerpo cae desde una altura de 60m. Calcula el tiempo que demora en caer y la velocidad con que llegará al suelo.
- 10.- Un móvil inicia una caída libre desde la altura de 40m ¿con qué velocidad llega al piso, si la aceleración de la gravedad es de  $9,8$  m/s<sup>2</sup> ?.
- 11.- Un cuerpo cae desde una altura de 80m. Calcula:
- ¿Qué tiempo tardará en caer?
  - ¿con qué velocidad llegará al suelo?
- 12.- De la parte superior de un edificio de 100m de altura, se lanza un cuerpo hacia arriba con una velocidad de 80m/s. ¿qué tiempo emplea en llegar al suelo? ( $g = 10$  m/s<sup>2</sup>)
- 13.- Se lanza hacia arriba un cuerpo con una  $V_i$  de 50 m/s. Calcula la altura máxima que alcanza y el tiempo que demora en tocar el suelo.
- 14.- ¿A qué altura vuela un avión, si una bomba que deja caer llega al suelo con una velocidad de 150 m/s?.
- 15.- Una persona se encuentra sobre un puente, deja caer una piedra y ve que transcurren 2,5s desde que la suelta hasta que toca el agua. Calcular:
- ¿qué altura sobre el agua tiene el puente?
  - ¿con qué velocidad choca la piedra con el agua?.
- 16.-Se suelta un cuerpo desde cierta altura tomando 4s en impactar con la Tierra. Determina su velocidad en la mitad de su recorrido. ( $g = 10$ m/s<sup>2</sup> )
- 17.- Desde que se deja caer una piedra en un pozo hasta que se oye el sonido del choque con el agua transcurren 2 s. Calcula la profundidad del pozo sabiendo que la velocidad del sonido es de 340 m/s.
- 18.-. Con el propósito de medir la altura de un edificio, se suelta un cuerpo desde el tejado y se mide el tiempo que tarda en llegar al suelo. Si ha tardado 3 s en caer, ¿cuál es la altura del edificio?:
- 100 m
  - 45 m
  - 80 m
  - 200 m
- 19.- Se lanza un cuerpo verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial de 7 m/s.
- ¿Cuál será su velocidad luego de 3 s?.
  - ¿Qué distancia habrá descendido en esos 3 s?.
  - ¿Cuál será su velocidad después de haber descendido 14 m?.
  - Si el cuerpo se lanzó desde una altura de 200 m, ¿en cuánto tiempo alcanzará el suelo?.
  - ¿Con qué velocidad lo hará?.
- 20.- Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 100 m/s, luego de 4 s de efectuado el lanzamiento su velocidad es de 60 m/s.
- ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?.
  - ¿En qué tiempo recorre el móvil esa distancia?.
  - ¿Cuánto tarda en volver al punto de partida desde que se lo lanzo?.
  - ¿Cuánto tarda en alcanzar alturas de 300 m
- 21.- Un observador situado a 40 m de altura ve pasar un cuerpo hacia arriba con una cierta velocidad y al cabo de 10 s lo ve pasar hacia abajo, con una velocidad igual en módulo, pero de distinto sentido.
- ¿Cuál fue la velocidad inicial del móvil?.
  - ¿Cuál fue la altura máxima alcanzada?.

## MOVIMIENTO COMPUESTO – PARABÓLICO

Es el movimiento resultante de la composición de dos o más movimientos simples.

Se distinguen:

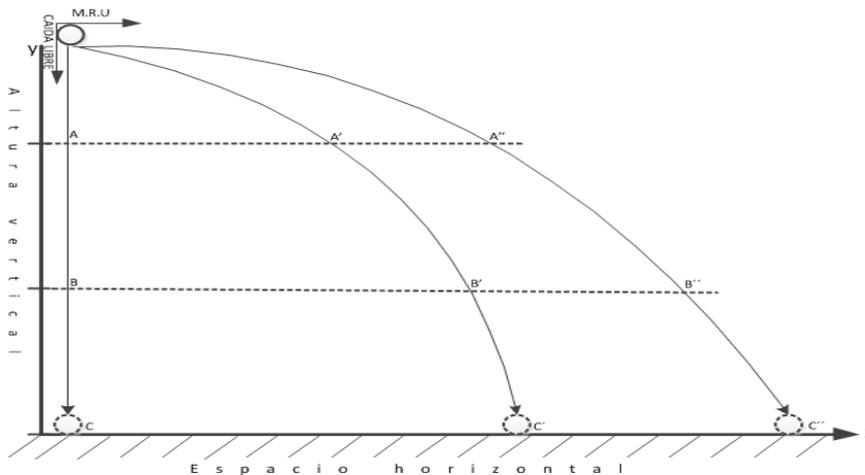
- Lanzamiento horizontal
- Lanzamiento oblicuo de los cuerpos

### PRINCIPIO DE LA INDEPENDENCIA DE LOS MOVIMIENTOS

“En el movimiento compuesto cada uno de los movimientos componentes se manifiestan independientemente, como si no existiera el otro movimiento con el que se compone.”

**A) LANZAMIENTO HORIZONTAL.** - O disparo horizontal, es la composición de dos movimientos rectilíneos:

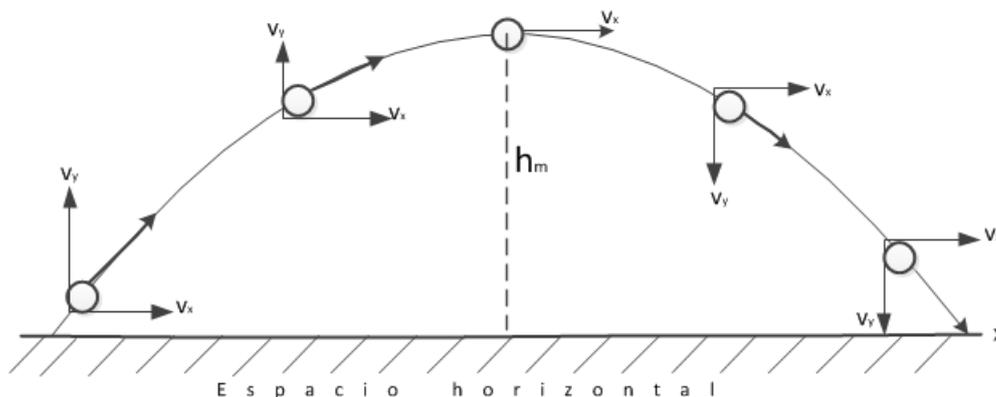
- Mov. Horizontal MRU
- Mov Vertical CAIDA LIBRE



- **Movimiento horizontal (en el eje x).**- Cumple con la ecuación del MRU:  
 $x = v_x \cdot t$ , es decir  **$e = v \cdot t$**
- **Movimiento vertical (en el eje y).**- Se cumple las ecuaciones de la caída libre.  $y = 1/2g \cdot t^2$  donde  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ , es decir:

$$h = 1/2g \cdot t^2 \quad \text{La Ecuación de la Trayectoria es: } y = (-g/2v_x^2) \cdot x^2$$

**B) LANZAMIENTO OBLICUO.** - Tiene la siguiente trayectoria:



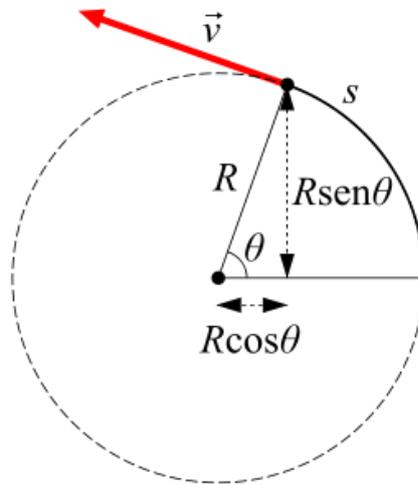
Se compone de:

- Movimiento horizontal (en el eje x).- Donde se cumple la ecuación del MRU,  $e = v \cdot t$
- Movimiento vertical (en el eje y).- El objeto sube con movimiento retardado hasta alcanzar la altura máxima y luego cae con caída libre (acelerado). SE cumple las ecuaciones de caída libre.

$$\text{ECUACION DE LA TRAYECTORIA: } y = \tan \alpha_x + (-g/2v_o^2 \cdot \cos^2 \alpha) \cdot x^2$$

## MOVIMIENTO CIRCULAR

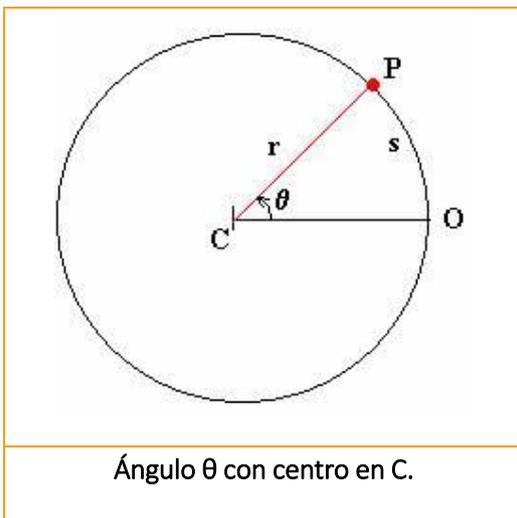
Es un movimiento en el que la trayectoria recorrida por el móvil es una circunferencia. A veces el movimiento circular no es completo: cuando un coche o cualquier otro vehículo toma una curva realiza un movimiento circular, aunque nunca gira los 360° de la circunferencia.



**EL MOVIMIENTO CIRCULAR EN MAGNITUDES ANGULARES.** - La descripción de un **movimiento circular** puede hacerse bien en función de **magnitudes lineales** ignorando la forma de la trayectoria (y tendremos velocidad y aceleración tangenciales), o bien en función de **magnitudes angulares** (y tendremos velocidad y aceleración angulares). Ambas descripciones están relacionadas entre sí mediante el valor del radio de la circunferencia trayectoria.

Al trabajar con magnitudes angulares es imprescindible entender lo relativo a una unidad de medida angular conocida como **radián**.

### EL RADIAN



El sistema de grados sexagesimales es **una** manera de medir ángulos, pero hay otros métodos, y uno de ellos es usando radianes.

Ahora veamos el asunto de medir los ángulos, pero en **radianes**.

Para medir un ángulo en radianes se mide el largo del arco ( $s$ ) abarcado por el ángulo  $\theta$  de la figura a la izquierda. Esto se puede hacer con un centímetro, con un hilito o con lo que sea. También se mide el radio del círculo.

Para obtener el valor del ángulo ( $\theta$ ) en radianes usamos la fórmula:

$$\theta_{(\text{rad})} = \frac{\text{arco}}{\text{radio}} \text{ y tenemos el ángulo medido en radianes}$$

El radián resulta ser **un número sin unidades**.

Esto significa que el valor del ángulo en radianes solo me indica cuántas veces entra el radio en el arco. Por ejemplo, si el ángulo  $\theta$  mide 3 radianes, eso significa que el radio entra 3 veces en el arco abarcado por ese ángulo.

Su quisiéramos calcular o conocer al valor del arco, hacemos:

$$\text{arco} = \theta_{(\text{rad})} \cdot \text{radio}$$

### ¿A cuántos grados equivale un radián?

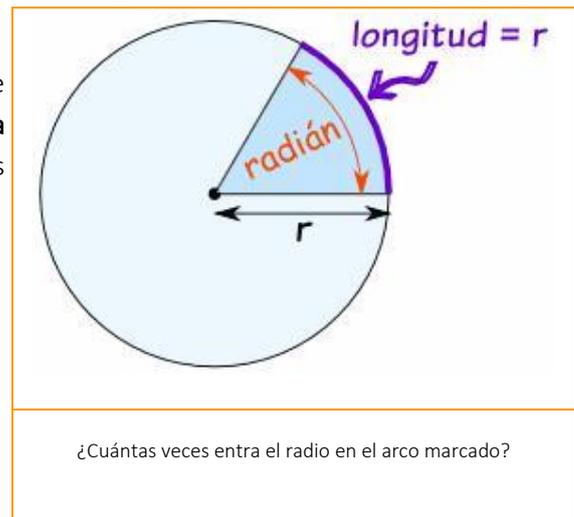
Pero el valor de un ángulo en radianes se puede expresar (convertir) en grados. En una **circunferencia** entera (360°) el arco entero es el **perímetro**, que es igual a  $2\pi$  por radio ( $2\pi \cdot r$ ). Así, a partir de la fórmula

$$\theta_{(\text{rad})} = \frac{\text{arco}}{\text{radio}} \text{ es que } 360^\circ \text{ equivalen a:}$$

$$360^\circ = \frac{2\pi \cdot r}{r} = 2\pi \text{ rad}$$

$$\Rightarrow 1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{360^\circ}{2(3,14)} = \frac{360^\circ}{6,28} = 57,3^\circ$$

Un ángulo de un radián equivale a un ángulo de 57,3°. Para usar la calculadora en radianes hay que ponerla en "RAD"



**EL PERIODO (T).**- Es el tiempo que tarda una partícula o un cuerpo en realizar una vuelta completa, revolución o ciclo completo. Por ejemplo, el periodo de rotación de la tierra es 24 horas. El periodo de rotación de la aguja grande del reloj es de 1 hora. La unidad utilizada para el periodo es el segundo o, para casos mayores, unidades mayores.

Conocida la frecuencia (en ciclos o revoluciones por segundo) se puede calcular el periodo (T) mediante la fórmula:

$$T = \frac{1}{F} \quad T = \frac{\text{seg}}{\text{ciclo}}$$

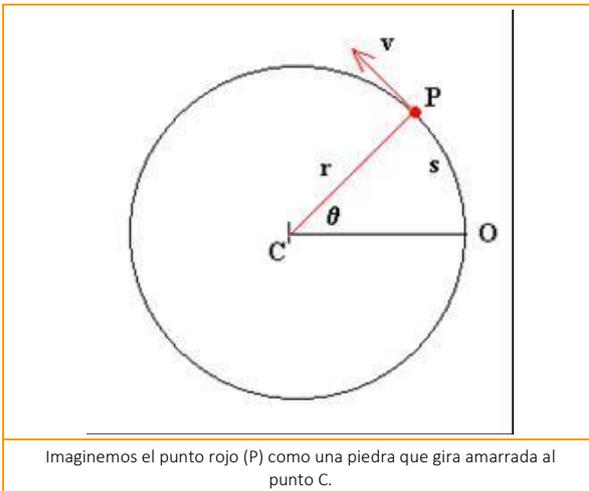
**FRECUENCIA (F)** de un movimiento circular al número de revoluciones, vueltas o ciclos completos durante la unidad de tiempo. La unidad utilizada para cuantificar (medir) la frecuencia de un movimiento es el **Hertz (Hz)**, que indica el número de revoluciones o ciclos por cada segundo.

Para su cálculo, usamos la fórmula

$$F = \frac{1}{T} \quad F = \frac{\text{ciclos}}{\text{seg}} \quad \text{o Hertz:}$$

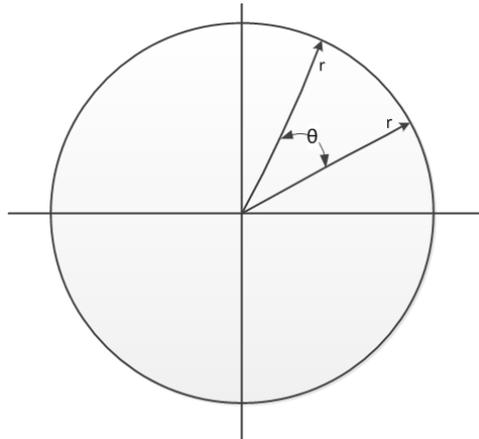
(En ocasiones se usa, en vez de **Hertz**,  $\text{seg}^{-1}$  ó  $\text{s}^{-1}$ ). Nótese que la frecuencia (F) es la inversa del periodo (T).

Una vez situado el origen O describimos el movimiento circular mediante las siguientes magnitudes angulares.



- **POSICIÓN ANGULAR ( $\theta$ ).**- Podemos imaginar, como ejemplo, que se tiene una piedra amarrada a una cuerda y la movemos en círculos de radio  $r$ . En un instante de tiempo  $t$  el móvil (en nuestro caso la piedra) se encuentra en el punto P. Su posición angular (lo que la piedra ha recorrido en la circunferencia) viene dada por el ángulo  $\theta$ , formado por el punto P, el centro de la circunferencia C y el origen O (desde donde empezó a girar la piedra).

**DESPLAZAMIENTO ANGULAR ( $\theta$ ).**- El vector posición  $r$  de la partícula se desplaza un ángulo " $\theta$ " en un tiempo " $t$ ". En el Sistema Internacional se mide en radianes



- **VELOCIDAD ANGULAR ( $\omega_m$ ).**- En el movimiento circular la velocidad angular está dada por el ángulo recorrido ( $\theta$ ) dividido por unidad de tiempo. El resultado está en grados por segundo o en rad por segundo.

$$\omega_m = \theta/t$$

$$\text{velocidad angular } \omega = \frac{\Delta\theta \leftarrow \text{ángulo recorrido}}{\Delta t \leftarrow \text{tiempo empleado}}$$

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

$\omega$  = velocidad angular en rad/seg.

$\theta$  = desplazamiento angular en rad.

$t$  = tiempo en segundos en que se efectuó el desplazamiento angular.

La velocidad angular también se puede determinar si sabemos el tiempo que tarda en dar una vuelta completa o periodo (T):

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{Como } T = \frac{1}{F} \text{ entonces } \omega = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \cdot \frac{F}{1} = 2\pi F \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

Aquí debemos apuntar que una misma velocidad angular se puede expresar de varias maneras diferentes.

Por ejemplo, para las lavadoras automáticas o para los motores de los autos se usan las **revoluciones por minuto (rpm)**. También a veces se usan las **rps (revoluciones por segundo)**.

También se usan los **grados por segundo** y los **radianes por segundo**.

Es decir, hay muchas unidades diferentes de velocidad angular. Todas se usan y hay que saber pasar de una a otra, lo que se hace aplicando una regla de 3 simple.

Por ejemplo, pasar una velocidad de 60 rpm a varias unidades diferentes:

$$60 \text{ rpm} = \frac{1 \text{ rev}}{\text{seg}} = \frac{360^\circ}{\text{seg}} = \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{seg}}$$

La más importante de todas las unidades de velocidad angular es **radianes por segundo**. Esta unidad es la que se usa en los problemas.

**Nota importante:**

Según lo anterior es correcto, entonces, decir que la velocidad angular es

$\omega = \frac{\text{radianes}}{\text{segundo}}$ , pero resulta que el radián es sólo un número comparativo, por lo mismo que la palabra radián suele no ponerse y en

la práctica la verdadera unidad es  $\frac{1}{\text{seg}}$ , que también puede ponerse

como  $\frac{1}{\text{s}}$ , e incluso como  $\text{s}^{-1}$ .

En efecto, muchas veces la velocidad angular se expresa en segundos elevado a menos uno ( $\text{s}^{-1}$ ) y para quienes no lo saben resulta incomprensible.

En el S.I. se mide se mide en **rad/s**

- **ACELERACIÓN ANGULAR MEDIA ( $\alpha_m$ ).**- Es el cambio o variación de la velocidad angular en la unidad de tiempo.  

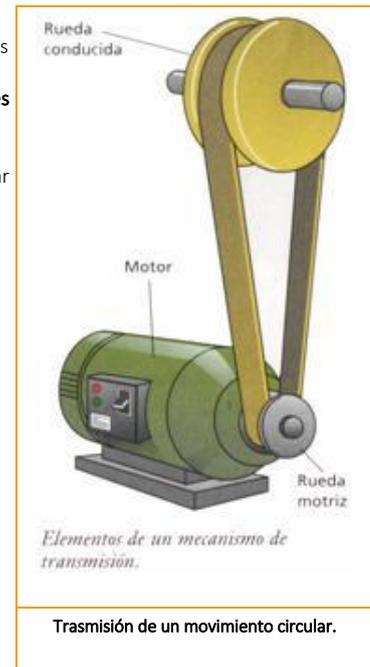
$$\alpha_m = \frac{\omega_f - \omega_o}{t}$$
- **LA VELOCIDAD TANGENCIAL O LINEAL (v).**- Aparte de la **velocidad angular**, también es posible definir la **velocidad lineal** de un móvil que se desplaza en círculo.

Por ejemplo, imaginemos un disco que gira. Sobre el borde del disco hay un punto que da vueltas con movimiento circular uniforme.

Ese punto tiene siempre una velocidad lineal que es tangente a la trayectoria. Esa velocidad se llama **velocidad tangencial**.

Para calcular la velocidad tangencial hacemos: espacio recorrido sobre la circunferencia (o arco recorrido) dividido por el tiempo empleado, que expresamos con la fórmula:

$$v_t = \frac{\text{arco}}{t} = \frac{\theta_{(\text{rad})} \cdot r}{t}$$
 pero como  $\frac{\theta_{(\text{rad})}}{t} = \omega$  entonces 
$$v_t = \omega \cdot r$$
 que se lee velocidad tangencial es igual a velocidad angular multiplicada por el radio.



Como la velocidad angular ( $\omega$ ) también se puede calcular en función del periodo (T) con la fórmula

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

y la velocidad tangencial siempre está en función del radio, entonces la fórmula

$$v_t = \omega \cdot r \quad \text{se convierte en} \quad v_t = \frac{2\pi r}{T}$$

que se lee: la velocidad tangencial es igual a 2 pi multiplicado por el radio (r) y dividido por el periodo (T).

Además, como  $\omega$  (velocidad angular) se expresa en  $\frac{1}{\text{seg}}$  y el radio se expresa en metros, las unidades de la velocidad tangencial serán metros por segundo (m/s).

- RELACIÓN ENTRE LA VELOCIDAD ANGULAR Y LA VELOCIDAD LINEAL O TANGENCIAL.

$$v_m = \omega_m \cdot r$$

- Relación entre aceleración angular y tangencial. -

$$a_m = \alpha_m \cdot r$$

#### TIPOS DE MOVIMIENTO CIRCULAR

**A) MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME M.C.U.** - Es cuando el móvil gira con velocidad angular constante. Si lo que gira da siempre el mismo número de vueltas por segundo, decimos que posee movimiento circular uniforme.

Ejemplos de cosas que se mueven con movimiento circular uniforme hay muchos: La tierra es uno de ellos. Siempre da una vuelta sobre su eje cada 24 horas. También gira alrededor del sol y da una vuelta cada 365 días. Un ventilador, un lavarropas o los viejos tocadiscos, la rueda de un auto que viaja con velocidad constante, son otros tantos ejemplos.

$$\omega = \theta/t$$

$$\theta = \omega \cdot t$$

**B) MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO M.C.U.V.** - Es cuando el móvil gira con variación de su velocidad angular a causa de la aceleración angular. Las ecuaciones que se cumplen son muy parecidas que en el M.R.U.V.

$$\omega_f = \omega_o + \alpha \cdot t$$

$$\omega_f^2 = \omega_o^2 + 2\alpha \cdot \theta$$

$$\theta = \omega_o t + \frac{\alpha \cdot t^2}{2}$$

$$\theta = \frac{(\omega_f - \omega_o) \cdot t}{2}$$

#### LA ACELERACIÓN EN LOS MOVIMIENTOS CURVILÍNEOS



Las ruedas se mueven con movimiento circular.

En los movimientos curvilíneos o circulares **la dirección cambia a cada instante**. Y debemos recordar que la velocidad considerada como vector  $v$  podrá variar (acelerar o decelerar) cuando varíe sólo su dirección, sólo su módulo o, en el caso más general, cuando varíen ambos.

#### La aceleración asociada a los cambios en dirección

En razón de la aseveración anterior, y desde un punto de vista sectorial (distancia), un **movimiento circular uniforme** es también un **movimiento acelerado**, aun cuando el móvil recorra la trayectoria a ritmo constante. La dirección del vector velocidad, que es tangente a la trayectoria, va cambiando a lo largo del movimiento, y esta variación de  $v$  que afecta sólo a su dirección da

lugar a una aceleración, llamada **aceleración centrípeta**.

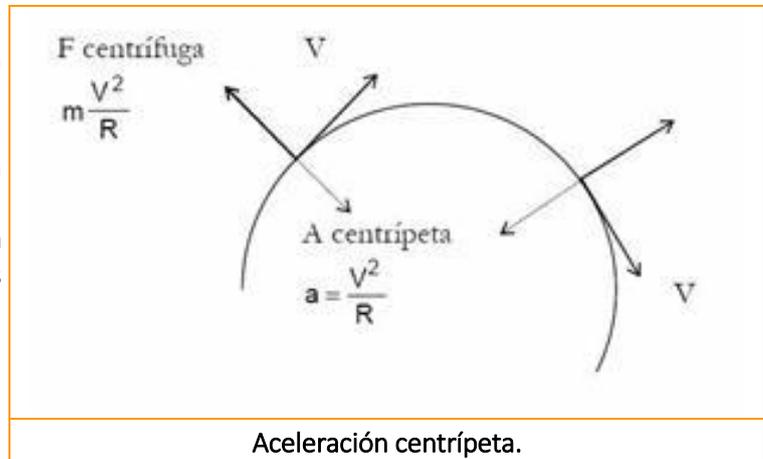
#### ACELERACIÓN CENTRÍPETA. -

Veamos el dibujo de la derecha:

El vector velocidad tangencial cambia de dirección y eso provoca la aparición de una aceleración que se llama aceleración centrípeta, que apunta siempre hacia el centro.

La **aceleración centrípeta** se calcula por cualquiera de las siguientes dos maneras:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot r$$



Aceleración centrípeta.

#### LA ACCELERACIÓN ASOCIADA A LOS CAMBIOS EN SU MÁDULO (RAPIDEZ)

Ya sabemos que un movimiento circular, aunque sea uniforme, posee la aceleración centrípeta debida a los cambios de dirección que experimenta su vector velocidad. Ahora bien, si además la velocidad del móvil varía en su magnitud (módulo) diremos que además posee **aceleración angular**.

Como corolario, podemos afirmar que un **movimiento circular uniforme** posee solo **aceleración centrípeta** y que un **movimiento circular variado** posee **aceleración centrípeta** y, además, **aceleraciones angular y tangencial**.

**ACELERACIÓN ANGULAR.** - La aceleración angular ( $\alpha$ ) se define como la variación de la velocidad angular con respecto al tiempo y está dada por:

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t}$$

Donde:

$\alpha$  = aceleración angular final en rad/ s<sup>2</sup>

$\omega_f$  = velocidad angular final en rad/s

$\omega_i$  = velocidad angular inicial en rad/s

$t$  = tiempo transcurrido en seg

Una forma más útil de la ecuación anterior es:

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t$$

**ACELERACIÓN TANGENCIAL.** - Imaginemos un disco que gira. Sobre el borde del disco hay un punto que da vueltas con **movimiento circular acelerado**. Ese punto tiene siempre una velocidad variada que es tangente a la trayectoria. Esa variación de velocidad se llama **aceleración tangencial**.

Es la aceleración que representa un cambio en la velocidad lineal, y se expresa con la fórmula

$$a_t = \alpha \cdot r$$

Donde

$\alpha$  = valor de la aceleración angular en rad/s<sup>2</sup>

r = radio de la circunferencia en metros (m)

Entonces, la aceleración tangencial es igual al producto de la aceleración angular por el radio.

#### OTRAS FÓRMULAS USADAS EN EL MOVIMIENTO CIRCULAR

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Pero como  $T = \frac{1}{F}$ , esta misma fórmula se puede poner como:

$$\omega = 2\pi \cdot F$$

#### EJERCICIOS:

Una rueda de 50 cm de radio gira a 180 r.p.m. Calcula:

- |  |                                  |
|--|----------------------------------|
| a) El módulo de la velocidad angular en rad/s    | Resultado: $\omega = 6\pi$ rad/s |
| b) El módulo de la velocidad lineal de su borde. | Resultado: $v = 9.42$ m/s        |
| c) Su frecuencia.                                | Resultado: $f = 3$ Hz            |

Un CD-ROM, que tiene un radio de 6 cm, gira a una velocidad de 2500 rpm. Calcula:

- |  |                                     |
|--|-------------------------------------|
| a) El módulo de la velocidad angular en rad/s    | Resultado: $\omega = 83.3\pi$ rad/s |
| b) El módulo de la velocidad lineal de su borde. | Resultado: $v = 15.7$ m/s           |
| c) Su frecuencia.                                | Resultado: $f = 41.66$ Hz           |

Un CD-ROM de 6 cm de radio gira a una velocidad de 2500 rpm. Si tarda en pararse 15s, calcular:

- |  |  |
|--|--|
| a) El módulo de la aceleración angular.            | Resultado: $a = -5.55\pi$ rad/s <sup>2</sup> |
| b) Las vueltas que da antes de detenerse.          | Resultado: $q = 625\pi$ rad = 312.5 vueltas  |
| c) El módulo de la velocidad angular para $t=10$ s | Resultado: $\omega = 27.77\pi$ rad/s         |